

# Modellierung und Simulation von nichtlinearen Reibungseffekten bei der Lageregelung von Servomotoren

ANDREAS KRÄMER und JOACHIM KEMPKE

Hochschule für angewandte Wissenschaften Würzburg-Schweinfurt

Die steigenden Ansprüche an die Positioniergenauigkeit von Servomotoren macht es nötig, dass immer mehr im System auftretende Effekte berücksichtigt werden müssen. Einer dieser Effekte ist die Reibung, die sich als ein nichtlinearer Einfluss auf die Regelgüte auswirkt. Um diese genau analysieren zu können, wird sie zunächst durch ein Modell abgebildet und anschließend simuliert. Hierfür gibt es unterschiedliche Modellansätze, die hier vorgestellt werden sollen. Zudem werden auch Hinweise zu deren Implementierung gegeben. Abschließend wird die Auswirkung der Reibung in einem Antriebssystem auf die Regelgüte anhand von Simulationsergebnissen analysiert.

Kategorie und Themenbeschreibung: Electromobility and Energy Engineering

Zusätzliche Schlüsselwörter: z.B. Reibung, Stribeck-Kurve, LuGre-Modell, Matrizen

## 1 EINLEITUNG

Zur Analyse von positionsgeregelten Antriebssystemen mit Servomotoren werden heutzutage vermehrt Simulationen eingesetzt, mit denen sich die auftretenden Effekte analytisch untersuchen lassen. Dazu wird ein Modell des Antriebs erstellt und in einem Simulationsprogramm aufgebaut. Allzu gerne und allzu oft werden hierbei nur die linearen Effekte wie elastische Kupplungen oder Getriebeübersetzungen berücksichtigt, da sich diese vergleichsweise einfach abbilden bzw. modellieren lassen. Diese so entstandenen LTI-Systeme (Linear-Time Invariant Systeme) lassen sich mittels Zustandsmatrizen beschreiben, modellieren und schließlich auch simulieren. Nichtlineare Effekte wie die Reibung lassen sich dagegen schwerer modellieren, da eine genaue Abbildung der realen Effekte kaum möglich ist. Außerdem können nichtlineare Effekte nicht durch die Zustandsraumdarstellung beschrieben werden. Deswegen muss zur Berücksichtigung von nichtlinearen Reibungseffekten diese Darstellungsform der Zustandsmatrizen aufgelöst werden und die Differentialgleichungen des linearen Systems einzeln im Simulationsprogramm implementiert werden, was deren Modellierung und Simulation zudem erschwert.

Eine Vernachlässigung der Reibung ist zwar in vielen Fällen bei der Regelung von Antrieben sinnvoll, jedoch lassen sich ohne die Beschreibung der Reibung einige Phänomene nicht erklären. Dazu zählen u. a. das Verharren einer Masse zu Beginn einer Bewegung auf der Stelle oder auffällige Ausschläge bei Messungen.

Zudem ist eine genaue Betrachtung der Reibungseffekte nötig, um eine höhere Positioniergenauigkeit (Regelgüte) der Servomotoren zu ermöglichen. Hierzu muss die Reibung zunächst analytisch betrachtet und modelliert werden. Mit Hilfe der Simulation kann die Reibung

---

Adressen der Autoren: Dipl.-Ing. (FH) A. Krämer, Prof. Dr.-Ing. J. Kempkes,  
Hochschule für angewandte Wissenschaften Würzburg-Schweinfurt, 97421 Schweinfurt  
Deutschland,  
[www.fhws.de](http://www.fhws.de)

Die Erlaubnis zur Kopie in digitaler Form oder Papierform eines Teils oder aller dieser Arbeit für persönlichen oder pädagogischen Gebrauch wird ohne Gebühr zur Verfügung gestellt. Voraussetzung ist, dass die Kopien nicht zum Profit oder kommerziellen Vorteil gemacht werden und diese Mitteilung auf der ersten Seite oder dem Einstiegsbild als vollständiges Zitat erscheint. Copyrights für Komponenten dieser Arbeit durch Andere als FHWS müssen beachtet werden. Die Wiederverwendung unter Namensnennung ist gestattet. Es andererseits zu kopieren, zu veröffentlichen, auf anderen Servern zu verteilen oder eine Komponente dieser Arbeit in anderen Werken zu verwenden, bedarf der vorherigen ausdrücklichen Erlaubnis.

näher untersucht werden, um anschließend die auftretenden Reibungseffekte durch eine geeignete Kompensation zu minimieren.

*Anmerkung:* In dieser Arbeit werden alle rotatorischen Bewegungen in lineare überführt. Eine solche Betrachtung ist möglich, da die rotatorische Bewegung genauso wie die lineare einen Freiheitsgrad besitzt. Somit sind die hergeleiteten Modelle und Betrachtungen uneingeschränkt auch für rotatorische Bewegungen gültig und es können stets die Größen der linearen Bewegung durch die entsprechenden der rotatorischen Bewegung ersetzt werden.

## 2 NICHT-LINEARE REIBUNGSMODELLIERUNG

Reibung tritt überall auf, wo zwei Körper mit ihren Oberflächen im gegenseitigen Kontakt stehen und gegeneinander bewegt werden. Reibung entzieht dem System Energie, die in Wärme umgewandelt wird. In der Physik bezeichnet man diesen Vorgang der Umwandlung als Dissipation.

Im Nachfolgenden sollen einige Modellierungsansätze vorgestellt werden.

### 2.1 Klassische Modelle

Die klassischen Modelle werden auch oft als statische Modelle bezeichnet. Statisch bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Modelle experimentell mit konstanten Geschwindigkeiten ermittelt wurden.

Der Franzose Guillaume Amontons (1663-1705) bildet mit seinen beiden wiederentdeckten Gesetzen die Grundlage für die Beschreibung von Reibung.

1. Gesetz: Die Reibkraft  $F_{\text{Reib}}$  ist von der Ausdehnung der Reibfläche unabhängig.
2. Gesetz: Die Reibkraft  $F_{\text{Reib}}$  ist der Normal- oder Anpresskraft  $F_N$  zwischen den Reibflächen direkt proportional.

$$F_{\text{Reib}} = \mu \cdot F_N$$

Der Faktor  $\mu$  beschreibt die Beschaffenheit der beiden Kontaktflächen und ist somit eine materialspezifische Konstante, die meist experimentell für jede Materialpaarung ermittelt werden muss. Diesen Proportionalitätsfaktor nennt man Reibungsbeiwert, -koeffizient, -zahl oder Reibwert.

Da die Reibkraft kein Skalar, sondern ein Vektor mit Länge und Richtung ist, muss man sich zusätzlich über die Orientierung der Kraft Gedanken machen. Da Reibung die Bewegung hemmt bzw. bremst, ist diese entgegen der Bewegungsrichtung anzunehmen und kann als eine Last auf die Masse gesehen werden. Eine Übersicht der auf eine bewegte Masse wirkenden Kräfte ist in Abbildung 1 dargestellt.

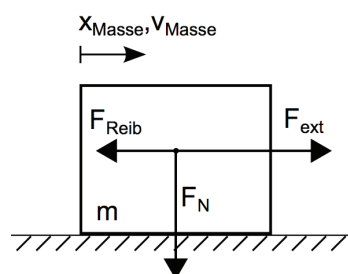


Abb. 1. Übersicht der auf eine Masse wirkenden Kräfte

Anmerkung: Im Folgenden wird die Reibung nur noch als richtungslose Größe betrachtet, die der Länge des Vektors entspricht. Die Richtung des Reibkraftvektors ist stets entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung zu sehen und bedarf somit keiner genaueren Betrachtung mehr.

## Gleitreibung

Die einfachste Art, Reibung geschwindigkeitsabhängig zu beschreiben, ist die Gleitreibung, Coulomb-Reibung oder auch trockene Reibung:

$$F_{\text{Reib}} = F_C \cdot \text{sign}(v)$$

Sie beschreibt die Reibung in Abhängigkeit von der Beschaffenheit der Kontaktflächen und vom Vorzeichen der Geschwindigkeit (Signumfunktion  $\text{sign}(v)$ ), jedoch nicht vom Betrag der Geschwindigkeit.  $F_C$  kann für das Beispiel einer linear bewegten Masse mit  $F_C = \mu_{\text{Gleit}} \cdot F_N$  bestimmt werden.

Durch die Signumfunktion ist die Gleitreibung für  $v = 0$  als null, für positive Geschwindigkeiten als  $F_C$  und für negative Geschwindigkeiten als  $-F_C$  definiert, wodurch eine Unstetigkeit bei  $v = 0$  entsteht. Unstetigkeiten und die damit verbundene Fallunterscheidung müssen in der Simulation durch Logikblöcke implementiert werden, was unschön und aufwendig ist, aber vor allem die Rechenzeit verlängert. Deswegen wird diese Unstetigkeit der Reibkurve in der Simulation durch eine steile Flanke angenähert.

## Viskose Reibung

Viskose Reibung tritt bei Bewegung unter Anwesenheit von Fluiden auf und wird geschwindigkeitsabhängig modelliert. Für eine allgemeine Beschreibung ergibt sich die folgende Gleichung.

$$F_{\text{Reib}} = F_V \cdot |v|^{\delta_v} \cdot \text{sign}(v)$$

$F_V$  ist ähnlich  $F_C$  eine materialspezifische Konstante. Der Parameter  $\delta_v$  gibt die Ordnung an und wird selten größer als 2 gewählt. Meist jedoch wird  $\delta_v = 1$  gesetzt, wodurch sich eine lineare Abhängigkeit ergibt.

$$F_{\text{Reib}} = F_V \cdot v$$

## Haftreibung

In Experimenten stellt man zudem fest, dass die Reibung zu Beginn einer Bewegung größer als die Gleitreibung ist. Es tritt Haftreibung auf. Sie wird durch eine zusätzlich Konstante  $F_S$  modelliert.

$$F_S = \mu_{\text{Haft}} \cdot F_N$$

Mit  $\mu_{\text{Haft}} \geq \mu_{\text{Gleit}}$  folgt  $F_S \geq F_C$ . Jedoch besitzt die Haftreibung keinen festen Wert und ist lediglich für  $v = 0$  definiert. Sie muss somit als eine Art Obergrenze angesehen werden, bis zu welcher eine externe Kraft ansteigen kann, bis sich der Körper bewegt und somit die Reibung durch eine andere Reibungsart beschrieben wird.

$$F_{\text{Reib}} = \begin{cases} F_{\text{ext}}, & v = 0 \text{ und } |F_{\text{ext}}| < F_S \\ F_C \cdot \text{sign}(F_{\text{ext}}), & v = 0 \text{ und } |F_{\text{ext}}| \geq F_S \end{cases}$$

Die in dieser Gleichung beschriebene Fallunterscheidung verursacht erneut Schwierigkeiten bei der Modellierung. Damit ist die Reibung keine ausschließliche Funktion der Geschwindigkeit

mehr, sondern auch noch zusätzlich von externen Kräften abhängig, die nur schwer erfassbar sind.

## Stribeck-Kurve

In der Realität tritt jedoch meist eine Kombination der oben beschriebenen Reibungsarten auf. Die meist verbreitetste Darstellungsform ist die Stribeck-Kurve. Sie kombiniert alle drei Reibungen (Haft-, Gleit- und viskose Reibung).

$$F_{Reib} = F_{Stribeck} \cdot \text{sign}(v) + F_V \cdot v$$

Für die Funktion  $F_{Stribeck}$  gibt es mehrere mathematische Beschreibungsansätze. Für eine Übersicht sei auf [Wojewoda et al. 2008] verwiesen. Am häufigsten wird

$$F_{Stribeck} = F_C + (F_S - F_C) \cdot \exp\left(-\left|\frac{v}{v_s}\right|^\delta\right)$$

verwendet. Die Parameter  $v_s$  und  $\delta$  bezeichnen die Stribeck-Geschwindigkeit und den Stribeck-Formfaktor. Die Stribeck-Geschwindigkeit gibt an, in welchem Geschwindigkeitsbereich der Übergang von der Haft- zur Gleitreibung stattfindet. Sie bestimmt somit zusammen mit dem Formfaktor, der den Exponentialverlauf der Kurve bestimmt, wie schnell die Stribeck-Kurve gegen die Gleitreibung konvergiert. Üblicherweise werden folgende Werte gewählt:  $v_s = 0,001 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $\delta = 1$  oder 2

Mit diesen Werten ergibt sich die in Abbildung 2 dargestellte Reibkurve nach Stribeck.

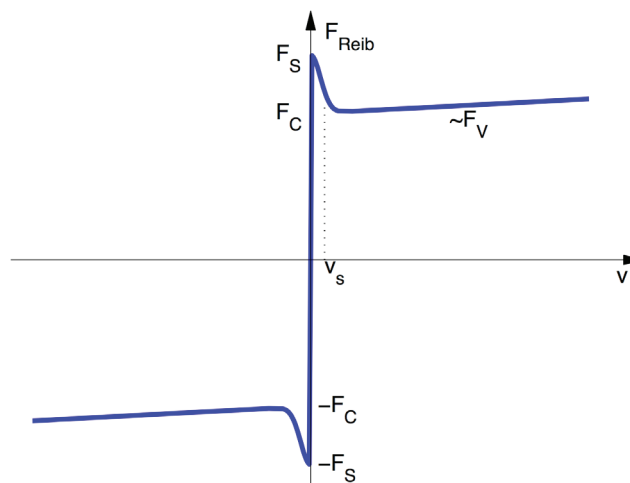


Abb. 2. Stribeck-Kurve mit  $\delta = 2$

Diese Stribeck-Kurve wird mittels einer Lookup-Table in die Simulationsumgebung implementiert.

## 2.2 Dynamisches Modell

Bei klassischen/statischen Modellen können die beschriebenen Probleme bei der Modellierung der Unstetigkeit und der Haftreibung auftreten. Deswegen und um einige andere Phänomene, die in Verbindung mit Reibung auftreten, erklären zu können, werden zunehmend dynamische Modelle verwendet. Diese beschreiben bspw. auch eine mikroskopisch kleine Auslenkung vor der eigentlichen Bewegung (pre-sliding displacement) oder erklären den Unterschied der Reibung bei ansteigender und sinkender Geschwindigkeit. Im Folgenden soll eines der dynamischen Modelle vorgestellt und modelliert werden.

### LuGre-Modell

Das LuGre-Modell (benannt nach den Universitäten Lund und Grenoble) berücksichtigt eine Vielzahl der Effekte und bedarf zudem keiner Unterscheidung des Falls  $v = 0$ . Das Modell lässt sich auf ein Borstenmodell zurückführen, das allgemein Reibung als Widerstandskraft vieler kleiner Borsten ansieht. Jedoch wird bei diesem Modell anstatt der Summation vieler Borsten nur eine einzelne Borste betrachtet, die den aggregierten Zustand aller Borsten beschreibt (vgl. Abbildung 3).

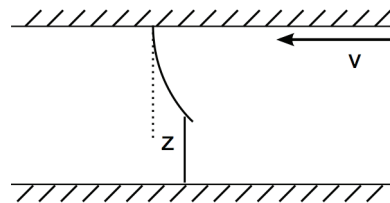


Abb. 3. LuGre-Borstenmodell

Dazu wird eine interne Variable  $z$  eingeführt, die sich ähnlich der Auslenkung einer mechanischen Feder verhält. Die Reibkraft ist nach dem LuGre-Modell als

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = v - \frac{|v|}{g(v)} z$$

$$F_{Reib} = \sigma_0 z + \sigma_1(v) \dot{z} + \sigma_2(v)$$

definiert.

Für die Funktion  $g(v)$  wählt man nach [Canudas de Wit et al. 1995]:

$$g(v) = \frac{1}{\sigma_0} \left( F_c + (F_s - F_c) \cdot \exp \left( - \left( \frac{v}{v_s} \right)^2 \right) \right)$$

Der Parameter  $\sigma_0$  gibt die Federkonstante der Borste an und ist aus dem Intervall  $[10^3; 10^5]$  zu wählen. Für  $\sigma_1(v)$ , die Dämpfung der Feder, gilt im Allgemeinfall:

$$\sigma_1(v) = \sigma_1 \exp \left( - \left( \frac{v}{v_d} \right)^2 \right)$$

$\sigma_1(v)$  wird jedoch meist ohne exponentiellen Verlauf verwendet:  $\sigma_1(v) = \sigma_1$ . Es empfiehlt sich  $\sigma_1$  nach [Canudas de Wit et al. 1995] auf eine kritische Dämpfung einzustellen.

$$\sigma_1 = 2\sqrt{\sigma_0 m}$$

Der Term  $\sigma_2(v)$  beschreibt den viskosen Anteil der Reibung. Dieser kann nach den Gleichungen der viskosen Reibung beschrieben werden.

$$\sigma_2 = F_V \cdot |v|^{\delta_v} \cdot \text{sign}(v)$$

$$\sigma_2 = F_V \cdot v$$

Für die Parameter  $F_c$ ,  $F_s$  und  $F_V$  wählt man die gleichen Werte wie zuvor bei den statischen Modellen.

[Abergerer and Otter 2002] empfiehlt das Modell noch zu normieren, wodurch sich die Modellierung im Simulationsprogramm etwas vereinfacht.

$$\sigma_0^{-1} \dot{\tilde{z}} = v - \frac{|v|}{\tilde{g}(v)} \tilde{z} \quad (\text{mit } \tilde{z} = \sigma_o z)$$

$$\tilde{g}(v) = F_c + (F_s - F_c) \cdot \exp\left(-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2\right)$$

$$F_{Reib} = \tilde{z} + \frac{\sigma_1(v)}{\sigma_0} \dot{\tilde{z}} + \sigma_2(v)$$

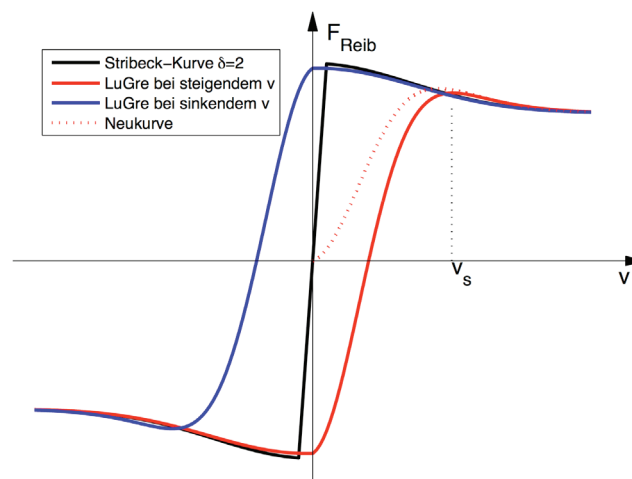


Abb. 4. Vergleich LuGre-Modell und Stribeck-Kurve

Auffällig bei der Betrachtung der Reibkurven in Abbildung 4 ist, dass die Kurve des LuGre-Modells eine Hysterese aufweist. Dies ist typisch für dynamische Reibmodelle und bedeutet in der Anwendung, dass die Reibkräfte von der Bewegungsrichtung und der aktuellen Auslenkung der Borste (Feder)  $z$  abhängen. Zudem ist die Reibkraft dadurch nicht mehr stets entgegen der Bewegungsrichtung, sondern im Bereich kleiner Geschwindigkeiten in derselben Richtung wie die Bewegung zu sehen.

### 3 REIBUNGSMODELLIERUNG IN MATRIZENNOTATION

Für eine einfachere Modellierung der Reibungseffekte ist es sinnvoll, auch diese in eine Matrizenform, ähnlich der Zustandsraum-Darstellung eines LTI-Systems, zu bringen.

Hierzu wird die bestehende Vektor/Matrizen-Form der Differentialgleichungen des linearen Systems um eine Matrix  $A_{NL}$  mit zugehörigem Vektor  $NL(x)$  (als Funktion der Zustandsgrößen) für die nichtlinearen Reibungseffekte erweitert.

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u + A_{NL} \cdot NL(x)$$

$$y = C \cdot x + D \cdot u$$

Die Matrix  $A_{NL}$  hat genauso viele Zeilen wie die Matrix  $A$ . Die Anzahl der Spalten von  $A_{NL}$  ist gleich der Anzahl der Zeilen von  $NL(x)$  und hängt von der Anzahl der berücksichtigten Stellen mit Reibung im System ab.

Diese zusätzliche Matrix mit zugehörigem Vektor muss auch in das Strukturbild des LTI-Systems eingebracht werden. Hierzu wird ein zusätzlicher Pfad parallel zur Matrix  $A$  modelliert und der Vektor  $NL(x)$  als Subsystem implementiert, in dem die Funktionen der Reibung zusammengefasst werden. Es ergibt sich das in Abbildung 5 dargestellte Strukturbild.

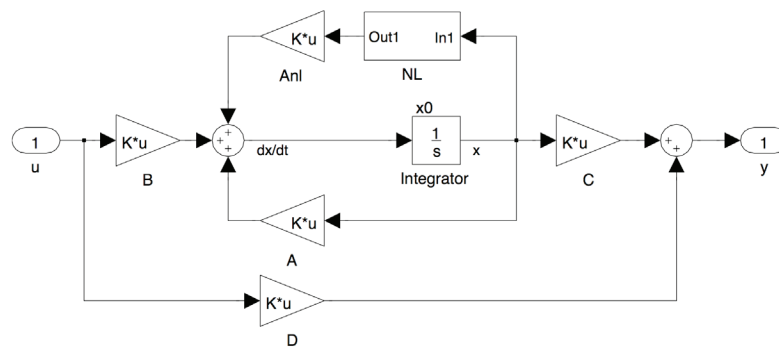


Abb. 5. Strukturbild zur Modellierung von Nichtlinearitäten in Matrizenform

Durch diese Art der Modellierung ist es möglich, das Gesamtsystem zunächst ohne Reibungseffekte durch die Matrizen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  des linearen Systems zu beschreiben und erst dann die Reibung an den relevanten Stellen einzufügen. Hierbei können die Matrizen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  stets unverändert übernommen werden.

Beispielhaft werden hier die Matrizen eines Zweimassenschwingers aufgezeigt. Dieser wird durch eine Motormasse  $m_M$  und eine Lastmasse  $m_L$  beschrieben, die durch eine elastische Kupplung mit den Parameter  $c$  (Federeigenschaft) und  $d$  (Dämpfungsparameter) verbunden sind.

Da die Reibung ähnlich einer externen Kraft auf die Masse wirkt, muss die Reibkraft auch in ähnlicher Form wie eine externe Kraft in den Matrizen auftauchen. Die Reibkraft wird als Funktion der Geschwindigkeit  $v_L$  der Last in den Vektor  $NL(x)$  geschrieben. Der Multiplikationsfaktor  $-\frac{1}{m_L}$  wird in der Matrix  $A_{NL}$  in die gleiche Zeile geschrieben wie der Wert  $\frac{1}{m_L}$  in der Matrix  $B$  (Faktor für externe Kräfte auf die Last). Da hier nur an einer Stelle Reibung auftritt, hat die Matrix  $A_{NL}$  nur eine Spalte, genauso wie der Vektor  $NL(x)$  nur einen Eintrag besitzt.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_M \\ a_L \\ v_M \\ v_L \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d}{m_M} & \frac{d}{m_M} & -\frac{c}{m_M} & \frac{c}{m_M} \\ \frac{d}{m_L} & -\frac{d}{m_L} & \frac{c}{m_L} & -\frac{c}{m_L} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_M \\ v_L \\ x_M \\ x_L \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} F_M \\ F_L \end{bmatrix}}_u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{m_L} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{NL}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} F_{Reib}(v_L) \\ NL(x) \end{bmatrix}}_{NL(x)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_M \\ v_L \\ x_M \\ x_L \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \cdot u$$

Die Beschreibung durch die aufgezeigte Vektor/Matrizen-Form kann immer verwendet werden, egal ob die Modellierung der Reibung durch eine Stribeck-Kurve, das LuGre-Modell oder eine andere Beschreibungsart erfolgt. Dies muss nur im Vektor  $NL(x)$  hinterlegt werden.

Zudem kann diese Form auch bei größeren Systemen verwendet werden. Hierbei zeigt sich ein großer Vorteil dieser Modellierungsvariante: Das Modell bleibt trotz der vielen Massen/Körper übersichtlich und der Modellierungsaufwand bleibt begrenzt, da sich lediglich die Matrizen vergrößern. Das Blockschaltbild bleibt davon unbeeinflusst. Zudem können wie bereits erwähnt die Matrizen des linearen System stets übernommen werden.

#### 4 SIMULATIONSERGEBNISSE VON SYSTEMEN MIT REIBUNG

Um das Verhalten von reibungsbehafteten Antriebssträngen zu simulieren, wird ein Zweimassenschwinger mit Reibung an der Last in einen Kaskadenregelkreis mit einem PPI-Regler eingebaut. Der Lageregelkreis wird auf der Motorseite geschlossen.

An diesem Aufbau soll der Einfluss einer stärker werdenden Reibung beschrieben werden. Hierzu wird zunächst das System ganz ohne Reibung und dann mit zwei unterschiedlichen Reibungskoeffizienten simuliert. Die Modellparameter sowie die Reglereinstellung und die unterschiedlichen Reibungskoeffizienten sind in Tabelle 1 hinterlegt. (Die Modellparameter und die Reglereinstellung bleibt bei allen Simulationen unverändert.)

| Parameter | Wert             | Einheit    | Parameter               | Wert   | Einheit |
|-----------|------------------|------------|-------------------------|--------|---------|
| $m_M$     | 1000             | kg         | a) $\mu_{\text{Gleit}}$ | 0      | -       |
| $m_L$     | 1000             | kg         | $\mu_{\text{Haft}}$     | 0      | -       |
| $c$       | $5 \cdot 10^6$   | N/m        | b) $\mu_{\text{Gleit}}$ | 0,0006 | -       |
| $d$       | 1341,64          | Ns/m       | $\mu_{\text{Haft}}$     | 0,0007 | -       |
| $K_V$     | 8                | m/(mm*min) | c) $\mu_{\text{Gleit}}$ | 0,006  | -       |
| $T_n$     | 30               | ms         | $\mu_{\text{Haft}}$     | 0,007  | -       |
| $K_P$     | $700 \cdot 10^3$ | Ns/m       |                         |        |         |

Tab. 1. Parameter für die Simulation



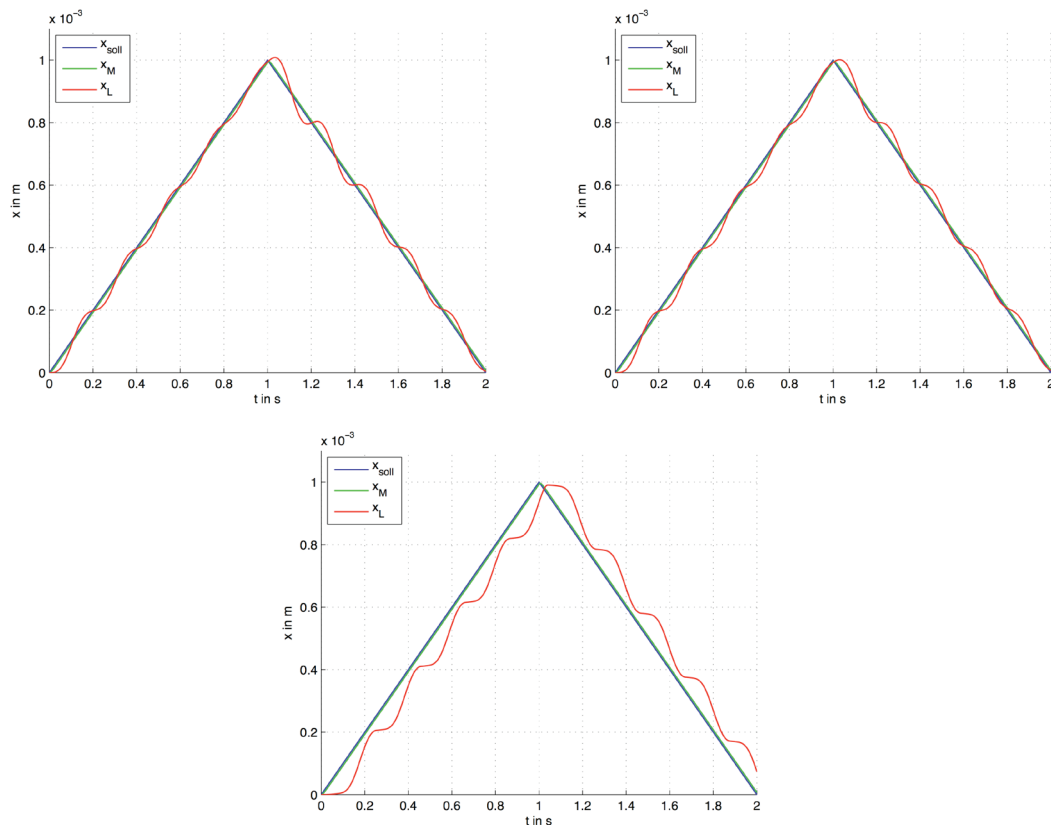


Abb. 6. Simulationsergebnisse: oben links nach a) , oben rechts nach b), unten nach c)

Wie in Abbildung 6 zu sehen, ist es ein kontinuierlicher Übergang von keiner zu starker Reibung. Der Einfluss der Reibung auf die Lastmasse ändert sich somit nicht schlagartig. Es können mehrere Phasen beschrieben werden. In der Teilabbildung 6 oben links kann sich die Lastmasse ohne Widerstand durch die Reibung bewegen. Dadurch schwingt die Last aufgrund der weichen Verbindung/Kupplung der beiden Massen um die Sollposition. Bei einem Verfahrensvorgang mit stationärer Endposition würde ohne Reibung die Last schließlich zum Stehen kommen und die Sollposition erreichen. Bei der Teilabbildung 6 oben rechts wirkt eine geringe Reibung, wodurch das Schwingen gedämpft wird. Dies ist besonders bei der Bewegungsumkehr zu erkennen. Zudem tritt hier bereits ein leichter Stick-Slip-Effekt auf. Der Stick-Slip-Effekt beschreibt das immer wieder Losreißen und Abbremsen der Lastmasse aufgrund der Haftreibungserhöhung bei stehender Masse. Somit kommt es zu einem permanenten Übergang zwischen Haft- und Gleitreibung. Dagegen ist bei einer noch stärkeren Reibung (siehe Teilabbildung 6 unten) nur noch dieser Effekt zu erkennen. Durch den stark ausgeprägten Stick-Slip-Effekt ist eine genaue Positionierung hier nur schwer möglich. Folglich führt eine starke Reibung und der Stick-Slip-Effekt zu Positionierungsungenauigkeiten, worunter die Regelgüte leidet.

## **5 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK**

Inhalt dieser Arbeit war es, einen Überblick über die Modellierung von nichtlinearen Reibungseffekte zu geben und diese zu simulieren. Hierfür wurden verschiedene Modellansätze (Stribeck-Kurve, LuGre-Modell) vorgestellt und Hinweise zur deren Implementierung in ein Simulationsprogramm gegeben.

Für die Modellierung der Reibung wurde eine übersichtliche Darstellungsform durch Matrizen gefunden, die sowohl theoretisch als auch praktisch in der Simulation eine Modellierung der Reibung möglich macht und Anwendung findet. Hierzu wurde das Strukturbild des LTI-Systems um einen Pfad erweitert, in dem die nichtlinearen Reibungseffekte mit einer zusätzlichen Matrix mit zugehörigem Vektor modelliert wurden.

Abschließend wurden noch einige Simulationsergebnisse präsentiert, an denen der Einfluss der Reibung auf die Positionierung des Antriebs analysiert wurde. Die Reibung kann die Regelgüte beeinflussen, wodurch eine Kompensation der Reibung durch geeignete regelungstechnische Maßnahmen nötig wird.

## REFERENZEN

- M. ABERGER AND M. OTTER. MODELING FRICTION IN MODELICA WITH THE LUND-GRENOBLE FRICTION MODEL. 2. INTERNATIONAL MODELICA CONFERENCE, [HTTPS://MODELICA.ORG/EVENTS/CONFERENCE2002/PAPERS/P36\\_ABERGER.PDF](https://modelica.org/events/conference2002/papers/p36_aberger.pdf), 2002.
- C. CANUDAS DE WIT. MODELLING AND CONTROL OF SYSTEMS WITH DYNAMIC FRICTION. LABORATORY OF AUTOMATIC CONTROL OF GRENOBLE, [HTTP://WWW.GIPSA-LAB.GRENOBLE-INP.FR/~CARLOS.CANUDAS-DE-WIT/PUBLICATIONS/FRICTION/\(3\)CCA\\_IDENTCOMP.PDF](http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~carlos.canudas-de-wit/publications/friction/(3)CCA_IDENTCOMP.PDF), 2007.
- C. CANUDAS DE WIT, H. OLSEN, K.J. ASTROM, AND P. LISCHINSKY. A NEW MODEL FOR CONTROL OF SYSTEM WITH FRICTION. IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 40, No.3, 1995.
- S. KLOTZBACH AND HERMANN HENRICHFREISE. EIN NICHTLINEARES REIBMODELL FÜR DIE NUMERISCHE SIMULATION REIBUNGSBEHAFTETER MECHATRONISCHER SYSTEME. ASIM 2002, 16. SYMPOSIUM SIMULATIONSTECHNIK., ROSTOCK, 10.-13. SEPTEMBER 2002, [HTTP://WWW.DMECS.DE/PDFS/DMECS\\_REIBUNG\\_PAPER.PDF](http://www.dmechs.de/pdfs/dmechs_reibung_paper.pdf), 2002.
- M. KUBISCH. MODELLIERUNG UND SIMULATION NICHTLINEARER MOTOREIGENSCHAFTEN. HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN, INSTITUT FÜR INFORMATIK, 2008.
- W. D. PIETRUSZKA. MATLAB UND SIMULINK IN DER INGENIEURPRAXIS. 3. BEARBEITETE UND ERWEITERTE AUFLAGE, WIESBADEN, VIEWEG+TEUBNER VERLAG, 2012.
- W. D. PIETRUSZKA. PROGRAMMSAMMLUNG AUF DER HOMEPAGE ZUM BUCH: MATLAB UND SIMULINK IN DER INGENIEURPRAXIS. 3. BEARBEITETE UND ERWEITERTE AUFLAGE, WIESBADEN, VIEWEG+TEUBNER VERLAG, [HTTP://WWW.SPRINGER.COM](http://www.springer.com), 2012.
- V. L. POPOV. KONTAKTMECHANIK UND REIBUNG. 2. ÜBERARBEITETE AUFLAGE, BERLIN HEIDELBERG, SPRINGER VERLAG, 2010.
- D. SCHRÖDER. INTELLIGENTE VERFAHREN - IDENTIFIKATION UND REGELUNG NICHTLINEARER SYSTEME. BERLIN HEIDELBERG, SPRINGER-VERLAG, 2010.
- J. WOJEWODA, A. STEFANSKI, M. WIERCIGROCH, AND T. KAPITANIAK. HYSTERETIC EFFECTS OF DRY FRICTION: MODELLING AND EXPERIMENTAL STUDIES. PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY A: MATHEMATICAL, PHYSICAL & ENGINEERING SCIENCES, 2008.